REPUBLIQUE RWANDAISE

106

MINISTERE DE L'EDUCATION
CONSEIL NATIONAL DES EXAMENS
B.P. 3817 KIGALI

EXAMEN NATIONAL DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES 2000/2001

EPREUVE : MATHEMATIQUE II

OPTIONS : **BIOLOGIE-CHIMIE**
ECONOMIQUE

DUREE : 3 HEURES

INSTRUCTIONS

- Chaque candidat est invité à répondre à toutes les 15 questions de la section A et à 3 questions de son choix de la section B.
- L'usage des instruments de géométrie et des calculatrices est autorisé.

SECTION A .

1. On définit la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{(x-1)^2} + \dfrac{2}{x+1}$.

   a) Déterminer le domaine de définition de f. **0,5pts**
   b) Trouver les asymptotes à la courbe représentative de f. **3,5pts**

2. Soient k un nombre réel et g une fonction numérique de variable réelle définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty,1\ ] : g(x) = kx + \dfrac{11}{4} \\ \forall x \in]1,+\infty[\ : g(x) = \dfrac{2x+3}{x+1} \end{cases}$$

   Trouver le nombre k si g est dérivable en 1. **3pts**
   Préciser alors le nombre dérivé de g en 1. **1pt**

3. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:
$$\frac{5u}{u-2} + \frac{3+u}{u} = \frac{4u+3}{u^2-2u}$$ **3pts**

4. Résoudre le système d'équations dans $\mathbb{R}^2$ (les inconnues sont x et y) :

$$\begin{cases} x \cos t - y \sin t = a \\ x \sin t + y \cos t = b \end{cases}$$ **4pts**

5. Chercher les solutions de l'équation suivante ($x \in \mathbb{R}$) et les représenter sur un cercle trigonométrique :
$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x + 3 = 0.$ **4pts**

6. Etant donnés deux nombres réels non nuls a et b, on considère la suite u définie par son premier terme u_0 et la formule de récurrence : $u_{n+1} = a\, u_n + b$.
   a) Que peut-on dire de la suite u lorsque a est égal à 1 ? **1pt**
   b) En supposant que a est différent de 1, on pose $k = \dfrac{b}{1-a}$
   et on considère la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = u_n - k$.
   Démontrer que la suite v est une suite géométrique. **3pts**

7. Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les points a (2,-3,-1) et b(6,5,-5).
a) Trouver une équation cartésienne de la sphère S de diamètre [a, b]. **2,5pts**
b) Chercher une équation du plan P tangent en a à la sphère S. **1,5pts**

8. Si x et y sont des nombres réels et n un nombre entier naturel :
   a) développer $(x + y)^n$ **1pt**
   b) En donnant à x et y des valeurs convenablement choisies, calculez :
      i) $2 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1}$ **1pt**

      ii) $1 + (-1)^n - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - .... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$ **1pt**

9. En appliquant la formule de Moivre et le binôme de Newton, exprimer cos $6x$ et sin $6x$ en fonction de sin x et cos x. **4pts**

10. Calculez $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\ln(x+5)}{x+4}$ **2pts**

11. Mettre sous la forme x + i y, où x et y sont des nombres réels, les nombres complexes suivants :

    a) $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^9$ **1,5pts**

    b) $\left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} + \dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} - 1\right)^{11}$ **1,5pts**

12. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

    $4\ e^{3x} - 3e^{2x} - e^x = 0.$ **3pts**

13. Une usine fabrique en très grande série un appareil pouvant présenter deux défauts seulement, désignés par A et B. Dans un lot de 1000 appareils prélevés, on constate que 100 présentent le défaut A, 80 présentent le défaut B et que 40 appareils présentent simultanément les défauts A et B. Un client achète un des appareils produits par l'usine.
    Calculer :
    a) La probabilité p_0 pour qu'il ne présente aucun défaut.
    b) La probabilité p_1 pour qu'il présente le défaut A seulement.
    c) La probabilité p_2 pour qu'il présente le défaut B seulement.
    d) La probabilité p_3 pour qu'il présente simultanément les défauts A et B. **4pts**

14. Déterminer la primitive de la fonction numérique de variable réelle définie par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ dont la représentation graphique passe par l'origine des axes de coordonnées. **4pts**

15. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(0,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$, on considère

la courbe d'équation $4x^2 + y^2 - 4 = 0$.
Trouver les demi-axes, les sommets, les foyers, l'excentricité et les équations des directrices de la courbe. **5pts**

SECTION B :

16. Etant donnée la fonction numérique F : $]0, +\infty[\to\mathbb{R}$:

$$x \to \int_0^x t \ \ln t \ \ dt.$$

a) Calculez F (x). **3pts**

b) Dresser un tableau de variation de la fonction F. **4pts**

c) Calculer l'aire de la partie A du plan limitée par la courbe représentative de F'(x), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = e^{-1}$ *et* $x = 2$ (prendre 2 cm pour une unité sur les axes). **7pts**

d) Ecrire l'équation de la tangente à l'extremum de la courbe représentative de F'(x). **1pt**

17. a) Soit z le nombre complexe défini par z = $\sqrt{3} + i$.
Comment doit-on choisir le nombre entier relatif n pour que z^n soit un nombre réel ? **6pts**

b) Déterminer les nombres complexes (sous forme algébrique et sous forme trigonométrique) dont le carré est égal au conjugué. **9pts**

18. a) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$. **6pts**

b) Représenter ces solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(0,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$. **2,5pts**

c) Vérifier que $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ est une solution de l'équation donnée en a). **2pts**
En déduire l'écriture des autres solutions sous forme algébrique. **4,5pts**

19. Dans le plan π_0 muni d'un repère orthonormé $\left(0,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$,

considérer la droite D d'équation $x = 1$ et f le point de coordonnées (3,0).

a) (i) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble C des points m du plan vérifiant la relation entre les distances d suivante : $d(m,f)=\sqrt{3}.\ d(m,D)$. **4pts**

(ii) Préciser la nature de l'ensemble C et donner deux de ses éléments caractéristiques. **4pts**

(iii) Tracer C dans le plan. **2pts**

b. Déterminer le nombre de points d'intersection de C et de la droite d'équation y = r x, r étant un paramètre réel. **5pts**

20. Une urne contient trois dés cubiques : deux dés normaux dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un dé spécial dont trois faces sont numérotées 6 et les trois autres sont numérotées1. On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.
Soit A l'événement : « les deux dés tirés sont normaux » et B l'événement : « les deux faces supérieures sont numérotées 1» .

a) Définir l'événement contraire Ā de A **1pt**
b) Calculer les probabilités de A et de Ā **3pts**
c) Calculer p (B/A) puis p (B∩A). **4pts**
d) Calculer p (B) **6pts**
e) Calculer p (A/B). **1pt**